学校编码：10384 分类号______ 密级______
学号：19020091152247 UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

两资产期权的Delta-Gamma对冲误差分析

The analysis of Delta-Gamma Hedging error about the two-asset option

谷 亚 杰

指导教师姓名：刘 继 春 教授
专 业 名 称：概率论与数理统计
论文提交日期：2012 年 5 月
论文答辩日期：2012 年 6 月
学位授予日期：

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

2012 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密　　（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

作者签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目 录

Contents

中文摘要

本篇文章主要研究用Delta-Gamma 对冲方法对冲两资产期权产生的离散化对冲误差的平方期望收敛问题。这里的Delta-Gamma 对冲方法是用两个标的资产以及它们所对应的衍生产品作为对冲工具来保证Delta 中性和Gamma 中性。我们考虑Black-Scholes市场模型下具有充分光滑赔付函数的欧式看涨期权，且等距时间段调整投资组合，分析当调整投资组合次数趋于无穷时误差平方的期望收敛速度。我们已经知道Delta-Gamma 对冲方法对冲单个资产期权的速度较一般的Delta对冲快，这里我们发现采用Delta-Gamma 对冲方法对两资产期权的对冲与对单资产期权对冲产生的误差收敛的速度一样。

关键词： Delta-Gamma 对冲；离散对冲；两资产期权；收敛速度；Black-Scholes市场

Abstract

The aim of this paper is to investigate the convergence of the expected squared hedging error of the two-asset option which induced by discretely rebalanced hedge portfolio of a Delta-Gamma strategy. The Delta-Gamma strategy is a strategy where the hedge portfolio is made both Delta and Gamma neutral using two underlying assets and their corresponding derivatives as hedge instruments.We consider European call options as instruments with sufficiently smooth payoff functions in a Black-scholes market, where the hedge portfolio is rebalanced on an equidistant grid. The rate of convergence of the expected squared hedging error as the number of adjustments of the hedge portfolio goes to infinity is analyzed. We have known the Delta-Gamma strategy of a single option produced higher convergence rates than the usual delta strategy.In this paper,we find that the Delta-Gamma strategy of the two-asset option also produces higher convergence rates than the usual delta strategy.

Key words: Delta-Gamma hedging; discrete time hedging; two-asset option; rate of convergence; Black-Scholes market

第一章 引言

1.1 背景知识

近年来，衍生产品市场在金融和投资领域变得越来越重要，每天银行、跨国公司、投资机构、基金以及投资者都会从事大量金融交易。这些机构或者个人都希望能够防范风险，或者使风险与不确定性降低到能够承受的水平。对冲就是一种使风险降低至最小的方法，这里我们从简单的Delta对冲方法开始介绍。

Delta变量：Delta变量是期权定价以及对冲过程中很重要的参数。一个股票期权的Delta为期权价格变化同股票价格变化之间的比率，也是期权持有者为了实现无风险对冲而卖出的股票的数量，这样的无风险对冲被称为Delta对冲（Delta hedging）。一般来讲，一个看涨期权的Delta定义为$\Delta C/\Delta S$，其中ΔS为股票价格微小变化的数量，ΔC为由于股票价格变动所触发的期权价格变动数量。在经典的Black-scholes 模型背景下，我们可以得到欧式看涨期权价格为：

$$F = x\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \tag{1-1}$$

其中

$$d_1: \quad d_1(x,\tau) = \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2: \quad d_2(x,\tau) = \frac{\ln(x/K) - (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$\Phi(\cdot)$为正态累计概率，$\tau = T - t$，r为无风险利率，T为到期时刻，F为t时刻期权价格，$K > 0$为执行价格，$\sigma > 0$为股价波动率。
则欧式看涨期权的Delta为：

$$\Delta = \partial F/\partial x = \Phi(d_1)$$

Black和Scholes就是通过卖出一份衍生证券和买入delta份标的证券来构造无风险的投资组合，通过delta对冲策略构造在短期内组合头寸收益等于无风险收益率从而得到上面的期权定价公式。

证券组合的Delta中性： 所谓证券组合的Delta，是以单一资产为标的资产的期权或其它衍生产品组合的Delta，定义为$\partial\Pi/\partial S$，∂S为标的资产价格变化，$\partial\Pi$为相应证券组合价值的变化。当Delta为0时，我们称证券组合为Delta中性。

Gamma变量： 由于Delta会变动，投资者的Delta对冲状态（或Delta中性状态）只能维持在一段短暂的时间里，对冲策略要不断地调整。一个期权交易组合的Gamma（Γ）是指交易组合的Delta的变化与标的资产价格变化的比率。当Gamma很小时，Delta 变化很缓慢，这时为了保证Delta中性所做的交易调整并不需要太频繁。但是当Gamma的绝对值很大时，交易组合的Delta对标的资产价格变动就变的很敏感，此时在任何一段时间内不对一个Delta中性的交易组合作调整都将会非常危险。

对上述满足（1-1）式的欧式看涨期权我们易得其Gamma关系式为

$$\Gamma = \partial^2 F/\partial x^2 = \frac{\varphi(d_1)}{X\sigma\sqrt{\tau}}$$

d_1，x，σ ，τ ，T定义如上，$\varphi(\cdot)$为正态密度函数。

证券组合的Gamma中性： 假定一个Delta中性的交易组合的Gamma为Γ，而某一交易所交易期权的Gamma为Γ_T。如果决定将ω_T数量的期权加入到交易组合中，由此产生新的交易组合的Gamma为$\omega_T\Gamma_T+\Gamma$。要使得交易组合Gamma呈中性，期权交易头寸应为$\omega_T=-\Gamma/\Gamma_T$。交易组合只在较短时间内为Gamma中性，随时间变化，只有不断调整期权数量使$\omega_T=-\Gamma/\Gamma_T$成立，才能保证交易组合的Gamma中性。

对一个Delta中性的交易组合进行Gamma中性化可以看做是对Delta中性交易中无法连续改变标的资产数量这一缺陷的校正。Delta中性保证了在对冲再均衡之间交易组合价值不受股票价格微小变化的影响；而Gamma中性则保证了在对冲再均衡之间，交易组合不受股票价格较大变化的影响。因此我们有理由相信在保证我们交易组合的Delta中性及Gamma中性较仅保证Delta中性更有利于减少对冲误差。

1.2　理论发展

关于各种对冲方法的评定近些年来引起了诸多学者的兴趣，评定侧重点大部分是对冲误差。离散化的对冲误差问题在Black 和Scholes（1973）的文章中已经被提及，他们认为离散化引起的风险范围很大，但可以被分散掉，且这一结论被Boyle和Emanuel（1980）所支持。早期的理论研究多为误差的大小，但也有期权到期时误

差的二阶矩的近似计算，Liang（1997）和Bertsimas等（2000）各自计算出了一维扩散模型下的渐近误差分布。

后来对离散对冲误差的关注主要集中于当调整投资组合次数趋近于无穷时，误差收敛到0的阶。在Zhang（1999）和Bertsimas（2000）等都有对完备扩散市场下等距调整时间点的欧式期权的离散对冲误差进行讨论。具体来说，对于Delta对冲方法，Rootzén（1980）得到了一个关于随机积分的全局收敛结论。Gobet和Temam（2001）看到了这个结论与对冲误差计算问题之间的联系，在此基础上考虑一个随时间变化的漂移系数为0的布朗运动，得到欧式看涨期权的一个离散Delta对冲误差的弱收敛分布，Temma（2003）将这个结果扩展到多维的情形。他们的一般化的结论是：具有Lipschitz 赔付函数的期权误差收敛速度为$1/\sqrt{n}$, 具有非常规赔付函数的期权误差收敛阶数会变小。例如，比起$1/\sqrt{n}$，数字期权的收敛速度为$1/n^{\frac{1}{4}}$, 当然这不是一个常规的例子。但是后来Geiss（2002）和Geiss（2004）又指出当我们固定调整投资组合的时间点，但时间点非等距时，数字期权的收敛速度可以提高为$1/\sqrt{n}$。我们这里没有讨论非等距的情况。

对于众所周知的delta-gamma 对冲方法（Björk（2004），Hull（2008）），是用标的资产和其它的衍生产品作为对冲工具来保证对冲投资组合的Delta 中性和Gamma中性。Gobet和Markhlouf(2012)分析了多维资产Delta-gamma 对冲的循迹误差的收敛问题，其中多维资产的收益率假定为正态分布，推出了误差平方的期望的上界。Brodén和Wiktorsson(2011)将在等距时间段下用标的资产和其它的衍生产品作为对冲工具对冲合约的结果进行了扩展，文章中指出当$n \to +\infty$时，$n^{\frac{3}{2}}\mathbb{E}[\mathcal{R}^2(n)]$收敛到一个非退化的极限。这表明当我们增加一个对冲工具后，误差收敛的阶明显增大。

1.3 本文的主要内容

本文内容主要是对Brodén和Wiktorsson(2011)的扩展，主要思想为用Delta-Gamma方法对冲我们的两资产期权。具体说来是用两个标的资产以及它们对应的衍生产品来套期保值我们的两资产期权，衍生产品选取欧式看涨期权作为实例，在Black-scholes市场模型下进行离散化对冲误差的分析。本篇文章的讨论中我们都假定无交易费用。

本文结构安排如下：

第一章引言：第一节回顾Delta对冲和Gamma对冲的基本知识，以及Delta中性和Gamma中性的原理；第二节叙述对冲误差分析的一些进展以及重要结论；第三节

给出本文的主要思想和文章脉络。

第二章两资产期权的对冲误差分析：第一节建立模型，引入一些记号，一些必要的假设等等；第二节给出在Black-scholes市场模型下，我们关于欧式看涨期权的一些结论，这些结论主要服务于我们的主要命题；第三节给出离散化对冲关于误差的主要命题，并证明。

第三章引理证明：主要给出第二章中引理的证明过程。

第 二 章　对于两资产期权的对冲误差

2.1　模型和假设

记定义在$\{\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\}$上的扩散过程$X$，$Y$为两个风险资产，假定市场无风险利率均为0。在风险中性概率测度$\mathbf{Q}$ 下风险资产价格服从下面Itô过程：

$$dX_t=\sigma_1 X_t dW_{1t},\ dY_t=\sigma_2 Y_t dW_{2t}$$

其中$X_0=x_0$，$Y_0=y_0$，波动率$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$为常数。$\{W_{it}\}_{t\geq 0}(i=1,2)$为一维Wiener过程，二者相互独立。

现在考虑一份T_1时刻到期的两资产期权合约，价值记为F_1，赔付函数为$\Phi_1(x,y)=(\alpha_1 x+\alpha_2 y-K_1)^+$，其中$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$，$K_1>0$为合约到期执行价格。我们用标的资产$X$、$Y$，以及衍生品$F_2$、$F_3$来复制这份合约。其中$F_2$只是风险资产X的衍生品，其赔付函数为$\Phi_2(x)=(x-K_2)^+$，到期时间记为$T_2$，到期执行价格为$K_2>0$；$F_3$只是风险资产Y的衍生品，其赔付函数为$\Phi_3(y)=(y-K_3)^+$，到期时间记为$T_3$，到期执行价格为$K_3>0$。这里到期时刻满足$T_1<T_2\leq T_3$，也即我们的合约满足以下条件

$$(H_1:)\begin{cases}\Phi_1(x,y)=(\alpha_1 x+\alpha_2 y-K_1)^+\\ \Phi_2(x)=(x-K_2)^+\\ \Phi_3(y)=(y-K_3)^+\end{cases}$$

且 $T_1<T_2\leq T_3$。

记$F_1(t,X_t,Y_t)$为$t(t<T_1)$时刻合约价格，$F_2(t,X_t)$，$F_3(t,Y_t)$分别表示t时刻衍生品价格，并引入以下记号：

h_t^B：银行存款量；

h_t^X：标的资产X的份数；

h_t^Y：标的资产Y的份数；

h_t^2：衍生品F_2的份数；

h_t^3：衍生品F_3的份数。

现在我们考虑利用标的资产X 、Y以及它们所对应的衍生产品F_2、F_3套期保值F_1，记V_t为t时刻对冲投资组合价值，则有

$$V_t = h_t^X X_t + h_t^Y Y_t + h_t^2 F_2(t, X_t) + h_t^3 F_3(t, Y_t) + h_t^B$$

自然的，我们想让投资组合价值等于F_1价值，为了对冲这份合约则有：

$$F_1(t, X_t, Y_t) = h_t^X X_t + h_t^Y Y_t + h_t^2 F_2(t, X_t) + h_t^3 F_3(t, Y_t) + h_t^B \tag{2-1}$$

记$F_{1,x}$，$F_{1,y}$，$F_{2,x}$，$F_{3,y}$分别为$F_1(x, y)$，$F_2(x)$，$F_3(y)$对应一阶导数。二阶导数、三阶导数记号以此类推。由（2-1）式我们易得

$$\begin{cases} F_{1,x}(t, X_t, Y_t) = h_t^X + h_t^2 F_{2,x}(t, X_t) \\ F_{1,y}(t, X_t, Y_t) = h_t^Y + h_t^3 F_{3,y}(t, Y_t) \\ F_{1,xx}(t, X_t, Y_t) = h_t^2 F_{2,xx}(t, X_t) \\ F_{1,yy}(t, X_t, Y_t) = h_t^3 F_{3,yy}(t, Y_t) \\ F_{1,xxx}(t, X_t, Y_t) = h_t^2 F_{2,xxx}(t, X_t) \\ F_{1,yyy}(t, X_t, Y_t) = h_t^3 F_{3,yyy}(t, Y_t) \end{cases} \tag{2-2}$$

由（2-2）式易解得：

$$h_t^2 = \frac{F_{1,xx}(t, X_t, Y_t)}{F_{2,xx}(t, X_t)}, \quad h_t^3 = \frac{F_{1,yy}(t, X_t, Y_t)}{F_{3,yy}(t, Y_t)}$$

$$h_t^X = F_{1,x}(t, X_t, Y_t) - F_{2,x}(t, X_t)\frac{F_{1,xx}(t, X_t, Y_t)}{F_{2,xx}(t, X_t)} \tag{2-3}$$

$$h_t^Y = F_{1,y}(t, X_t, Y_t) - F_{3,y}(t, Y_t)\frac{F_{1,yy}(t, X_t, Y_t)}{F_{3,yy}(t, Y_t)}$$

则T_1时刻我们的对冲投资组合价值可表示为：

$$\begin{aligned} V_{T_1} = &\int_0^{T_1} (F_{1,x}(t, X_t, Y_t) - F_{2,x}(t, X_t)\frac{F_{1,xx}(t, X_t, Y_t)}{F_{2,xx}(t, X_t)})dX_t \\ &+ \int_0^{T_1} (F_{1,y}(t, X_t, Y_t) - F_{3,y}(t, Y_t)\frac{F_{1,yy}(t, X_t, Y_t)}{F_{3,yy}(t, Y_t)})dY_t \\ &+ \int_0^{T_1} \frac{F_{1,xx}(t, X_t, Y_t)}{F_{2,xx}(t, X_t)}dF_2(t, X_t) + \int_0^{T_1} \frac{F_{1,yy}(t, X_t, Y_t)}{F_{3,yy}(t, Y_t)}dF_3(t, Y_t) + F_1(0, X_0, Y_0) \end{aligned}$$

又因为　$dF_2(t, X_t) = F_{2,x}(t, X_t)dX_t$，　$dF_3(t, Y_t) = F_{3,y}(t, Y_t)dY_t$　则有：

$$V_{T_1} \;=\; \int_0^{T_1} (F_{1,x}(t, X_t, Y_t) - F_{2,x}(t, X_t)\frac{F_{1,xx}(t, X_t, Y_t)}{F_{2,xx}(t, X_t)})dX_t \tag{2-4}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{T_1}(F_{1,y}(t,X_t,Y_t)-F_{3,y}(t,Y_t)\frac{F_{1,yy}(t,X_t,Y_t)}{F_{3,yy}(t,Y_t)})dY_t\\
&+\int_0^{T_1}\frac{F_{1,xx}(t,X_t,Y_t)}{F_{2,xx}(t,X_t)}F_{2,x}(t,X_t)dX_t\\
&+\int_0^{T_1}\frac{F_{1,yy}(t,X_t,Y_t)}{F_{3,yy}(t,Y_t)}F_{3,y}(t,Y_t)dY_t+F_1(0,X_0,Y_0)\\
=\;&\Phi(X_{T_1},Y_{T_1})
\end{aligned}
$$

这样对冲投资组合就复制了这份合约。

2.2 Black-scholes市场模型下相关结论

2.1节中给出的扩散过程X、Y均为几何布朗，本文中我们的衍生产品$F_2(t,x)$，$F_3(t,y)$选取欧式看涨期权为实例，在Black-scholes市场模型下，由B-S公式，我们容易给出$F_1(t,x\mid\mathscr{F}^Y_{T_1})$，$F_2(t,x)$，$F_3(t,y)$的定价公式（见第三章），由定价公式不难得到以下引理：

引理2.1：对于$F_i(i=1,2,3)$一阶导数，存在有界常数C，使得

$|F_{2,x}(t,x)|\le C$，　$\forall(t,x)\in[0,T_2]\times\mathbb{R}_+$；

$|F_{3,y}(t,y)|\le C$，　$\forall(t,y)\in[0,T_3]\times\mathbb{R}_+$；

$|F_{1,x}(t,x\mid\mathscr{F}^Y_{T_1})|\le C$，　$\forall(t,x)\in[0,T_2]\times\mathbb{R}_+$；

$|F_{1,y}(t,x\mid\mathscr{F}^X_{T_1})|\le C$，　$\forall(t,y)\in[0,T_3]\times\mathbb{R}_+$

引理2.2：对任意有界实数p，存在有界常数C，使得

$$
\begin{aligned}
|x^pF_{2,xx}(t,x)|&\le\frac{C}{(T_2-t)^{1/2}}\quad\forall(t,x)\in[0,T_2]\times\mathbb{R}_+\\
|y^pF_{3,yy}(t,y)|&\le\frac{C}{(T_3-t)^{1/2}}\quad\forall(t,y)\in[0,T_3]\times\mathbb{R}_+\\
|x^pF_{1,xx}(t,x\mid\mathscr{F}^Y_{T_1})|&\le\frac{C}{(T_1-t)^{1/2}}\quad\forall(t,x)\in[0,T_1]\times\mathbb{R}_+\\
|y^pF_{1,yy}(t,y\mid\mathscr{F}^X_{T_1})|&\le\frac{C}{(T_1-t)^{1/2}}\quad\forall(t,y)\in[0,T_1]\times\mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

上面的引理指出我们期权的Delta值有界，但是由（2-4）式看出对冲误差依赖于分数$F_{1,xx}/F_{2,xx}$，$F_{1,yy}/F_{2,yy}$ 如此若我们想让上述分数有界，则须使$F_{2,xx}$，$F_{3,yy}$的界远离0，或者至少使$F_{1,xx}$较$F_{2,xx}$快的趋近于0，$F_{1,yy}$较$F_{3,yy}$快的趋近于0。出于实际情况的考虑我们指出当$\alpha_1X_t+\alpha_2Y_t$等于K_1且t接近于T_1时，h_t^2，h_t^3 趋近于0.后面关于对冲误差分析的证明中我们会用到下面的引理.

引理2.3： 假设满足H_1条件，则存在有界常数C，使得

$$\left|\frac{F_{1,xx}(t,x \mid \mathscr{F}_{T_1}^Y)}{F_{2,xx}(t,x)}\right| \leq \frac{C}{(T_1-t)^{1/2}} \quad \forall (t,x) \in [0,T_1] \times \mathbb{R}_+$$

$$\left|\frac{F_{1,yy}(t,y \mid \mathscr{F}_{T_1}^X)}{F_{3,yy}(t,y)}\right| \leq \frac{C}{(T_1-t)^{1/2}} \quad \forall (t,y) \in [0,T_1] \times \mathbb{R}_+$$

引理2.4： H_1条件下，存在常数C使得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_{2,xxx}^2(t,x)X_t^6\sigma_1^6] &\leq \frac{C}{(T_2-t)^{3/2}} \\
\mathbb{E}[F_{3,yyy}^2(t,y)Y_t^6\sigma_2^6] &\leq \frac{C}{(T_3-t)^{3/2}} \\
\mathbb{E}[F_{1,xxx}^2(t,x \mid \mathscr{F}_{T_1}^Y)X_t^6\sigma_1^6] &\leq \frac{C}{(T_1-t)^{3/2}} \\
\mathbb{E}[F_{1,yyy}^2(t,y \mid \mathscr{F}_{T_1}^X)Y_t^6\sigma_2^6] &\leq \frac{C}{(T_1-t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

且有

$$\lim_{t \to T_2}(T_2-t)^{\frac{3}{2}}\mathbb{E}[F_{2xxx}^2(t,x)X_t^6\sigma_1^6] = \tfrac{K_2^3\sigma_1^3}{4\sqrt{\pi}}p_X(t,x_0,K_2) \tag{2-5}$$

$$\lim_{t \to T_3}(T_3-t)^{\frac{3}{2}}\mathbb{E}[F_{3yyy}^2(t,y)Y_t^6\sigma_2^6] = \tfrac{K_3^3\sigma_2^3}{4\sqrt{\pi}}p_Y(t,y_0,K_3) \tag{2-6}$$

$$\lim_{t \longrightarrow T_1}(T_1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbb{E}[F_{1,xxx}^2(t,x \mid \mathscr{F}_{T_1}^Y)X_t^6\sigma_1^6] = \tfrac{(K_1-\alpha_2 Y_{T_1})^3\sigma_1^3}{4\sqrt{\pi}}p_X(t,x_0,\tfrac{K_1-\alpha_2 Y_{T_1}}{\alpha_1}) \tag{2-7}$$

$$\lim_{t \longrightarrow T_1}(T_1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbb{E}[F_{1,yyy}^2(t,x \mid \mathscr{F}_{T_1}^X)Y_t^6\sigma_2^6] = \tfrac{(K_1-\alpha_1 X_{T_1})^3\sigma_1^3}{4\sqrt{\pi}}p_Y(t,y_0,\tfrac{K_1-\alpha_1 X_{T_1}}{\alpha_2}) \tag{2-8}$$

以上引理证明均见第三章。

2.3 离散模型误差

假定我们在设定好的时间点t_i^n调整对冲投资组合，n为调整点的个数，在时间段等距的情况下我们有

$$t_i^n = \frac{iT_1}{n} \quad i = (0,1,...,n-1)$$

记$t=T_1$时对冲误差为$\mathcal{R}_{2\Gamma}(n)$，$\varphi_n(t)=\sup\{t_i^n|t_i^n<t\}$，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{2\Gamma}(n)=&\int_0^{T_1}(h_t^X-h_{\varphi_n(t)}^X)dX_t+\int_0^{T_1}(h_t^Y-h_{\varphi_n(t)}^Y)dY_t\\&+\int_0^{T_1}(h_t^2-h_{\varphi_n(t)}^2)dF_2(t,X_t)+\int_0^{T_1}(h_t^3-h_{\varphi_n(t)}^3)dF_3(t,Y_t)\end{aligned}$$

下面的命题给出我们的主要结果，它表明由该种方法去对冲两资产期权得到的对冲误差平方的期望当$n\to\infty$时以$n^{-\frac{3}{2}}$的速度趋近于0。

命题1：假设H_1条件满足，则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{R}_{2\Gamma}^2(n)]=&\mathbb{E}[\boldsymbol{I}(K_1>\alpha_2Y_{T_1})(\frac{T_1}{n})^{\frac{3}{2}}C_{\frac{3}{2}}\frac{(K_1-\alpha_2Y_{T_1})^3\sigma_1^3}{4\sqrt{\pi}}p_X(t,x_0,\frac{K_1-\alpha_2Y_{T_1}}{\alpha_1})]\\&+\mathbb{E}[\boldsymbol{I}(K_1>\alpha_1X_{T_1})(\frac{T_1}{n})^{\frac{3}{2}}C_{\frac{3}{2}}\frac{(K_1-\alpha_1X_{T_1})^3\sigma_2^3}{4\sqrt{\pi}}p_Y(t,y_0,\frac{K_1-\alpha_1X_{T_1}}{\alpha_2})]+o(\frac{1}{n^{3/2}})\end{aligned}$$

证明：因为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{2\Gamma}(n)=&\int_0^{T_1}(h_t^X-h_{\varphi_n(t)}^X)dX_t+\int_0^{T_1}(h_t^Y-h_{\varphi_n(t)}^Y)dY_t\\&+\int_0^{T_1}(h_t^2-h_{\varphi_n(t)}^2)dF_2(t,X_t)+\int_0^{T_1}(h_t^3-h_{\varphi_n(t)}^3)dF_3(t,Y_t)\end{aligned}$$

且　$dF_2(t,X_t)=F_{2,x}(t,X_t)dX_t$，　$dF_3(t,Y_t)=F_{3,y}(t,Y_t)dY_t$，
$dX_t=\sigma_1X_tdW_{1t}$，$dY_t=\sigma_2Y_tdW_{2t}$，W_{1t}，W_{2t}相互独立，则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{R}_{2\Gamma}^2(n)]=&\mathbb{E}[\int_0^{T_1}[(h_t^X-h_{\varphi_n(t)}^X)+(h_t^2-h_{\varphi_n(t)}^2)F_{2,x}(t,X_t)]^2\sigma_1^2X_t^2dt]\\&+\mathbb{E}[\int_0^{T_1}[(h_t^Y-h_{\varphi_n(t)}^Y)+(h_t^3-h_{\varphi_n(t)}^3)F_{3,y}(t,Y_t)]^2\sigma_2^2Y_t^2dt]\\=&\mathbb{E}_1+\mathbb{E}_2\end{aligned}$$

只讨论第一部分$\mathbb{E}_1$，第二部分$\mathbb{E}_2$的讨论同理。

记$g(t,x,y)=D^2(t,x,y)X_t^2\sigma_1^2$

其中$D(t)=h_t^X-h_{\varphi_n(t)}^X+(h_t^2-h_{\varphi_n(t)}^2)F_{2,x}(t,X_t)$

将（2-3）式带入，有

$$D(t)=F_{1,x}(t,x,y)-F_{1,x}(\varphi_n(t),x,y)-[F_{2,x}(t,x)-F_{2,x}(\varphi_n(t),x)]\frac{F_{1,xx}(\varphi_n(t),x,y)}{F_{2,xx}(\varphi_n(t),x)}$$

由双期望公式得：